

*Комментарии Виссарионовичу от
почтеннейшего его таланта и жемчуга -
УДК 551.463.21 *материала его программы,**

О МОДЕЛИРОВАНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОД *Попов О. Е.*
В ДВУМЕРНО-НЕОДНОРОДНОМ ВОЛНОВОДЕ

Буренков С. В., Попов О. Е.

В работе рассмотрено моделирование взаимодействия мод в нерегулярном волноводе с использованием метода параболического уравнения. Полученные результаты сравниваются с теоретическими расчетами для простой модели среды. Получены зависимости результатов взаимодействия мод на выходе нерегулярного участка волновода от разности фаз коэффициентов возбуждения на входе его.

Основным инструментом для решения задач распространения звука в двумерно-неоднородных волноводах является метод параболического уравнения (ПУ). Однако, несмотря на высокую численную эффективность, этот метод уступает в наглядности получаемых результатов и простоте их интерпретации классическим аналитическим методам — модовому и лучевому.

Цель настоящей работы — попытаться объединить универсальность численных методов с привычностью и наглядностью аналитических. Достигается эта цель тем, что вертикальные разрезы звукового поля в плоских двумерно-неоднородных волноводах, рассчитанные по программе, реализующей метод ПУ, раскладываются по собственным функциям мод волноводов сравнения.

Такая схема расчета по сравнению с непосредственным использованием ПУ для вычисления акустического поля обладает следующими полезными свойствами: во-первых, в модовом приближении для плоскостных сред решено большое количество практически важных задач. Предложенная процедура позволяет обобщить эти результаты на случай нерегулярного волновода (хотя и в численном виде); во-вторых, для исследования взаимодействия мод в океанических волноводах развит ряд приближенных методов. Предложенное разложение позволяет установить, как и при каких условиях взаимодействуют моды, когда применимо адиабатическое приближение и т. п.

Для расчета звукового поля используется программа К. В. Авилова [1], реализующая уточненное широкоугольное параболическое приближение. Собственные функции волноводов сравнения вычисляются по известной программе А. В. Вагина — Н. Е. Мальцева [2]. При разложении поля по комплексным ортонормированным собственным функциям $\psi_n(z)$ учитываются и те их участки, где эти функции экспоненциально затухают, что обеспечивает высокую степень ортогональности в численных расчетах. Для рассматриваемых ниже примеров вычисленные значения

$$|\langle \psi_n | \psi_m \rangle| = \left| \int \psi_n(z) \psi_m(z) dz \right| = \begin{cases} < 4 \cdot 10^{-6} & \text{при } n \neq m \\ \approx 1,0 & \text{при } n = m \end{cases}$$

где m и n — номера мод.

Чтобы возбудить в волноводе одну или несколько мод, в начальном сечении задается поле с вертикальным распределением, соответствующим одной моде или сумме нескольких мод $p(x_0, z) = \sum_n A_n \exp(i\varphi_n) \psi_n(z)$, где A_n и φ_n — коэффициент возбуждения и фаза n -й моды, x_0 — координата начального сечения.

Для проверки работоспособности алгоритма на входе трехмодового волновода постоянной глубины возбуждалась первая мода с коэффициен-

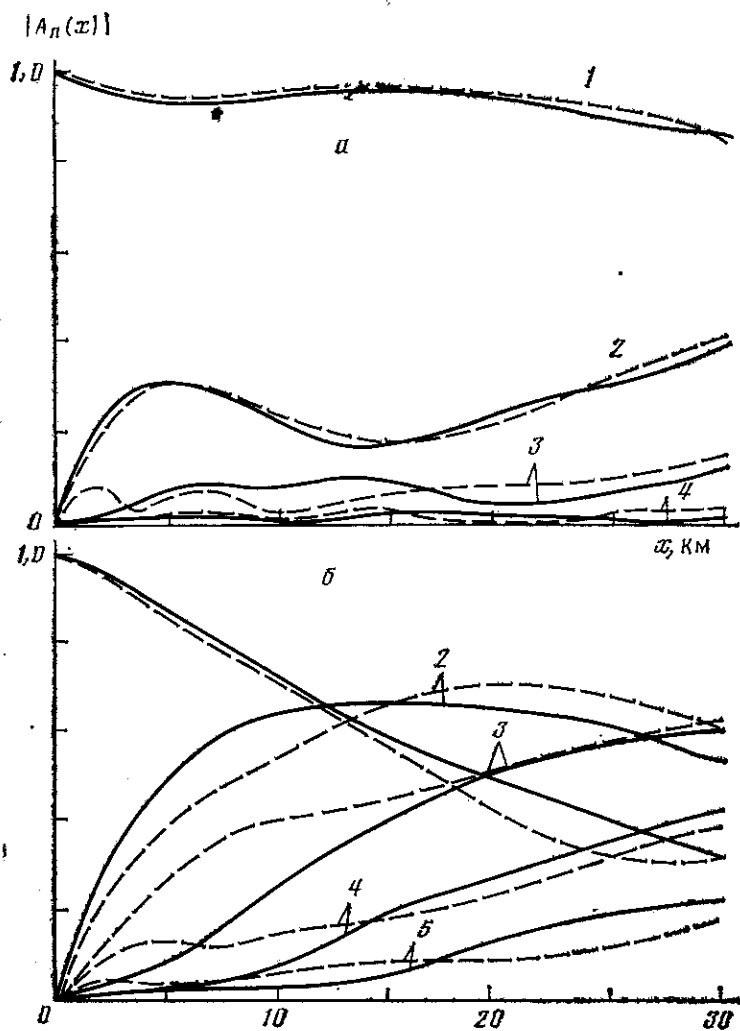


Рис. 1. Зависимости $|A_n(x)|$ от расстояния в клине при возбуждении на входе в клин первой моды: а - $f=25$, б - $f=65$ Гц. Цифрами обозначены номера мод. Сплошной линией показаны кривые, рассчитанные по ПУ, штриховой - аналитическим методом

том возбуждения равным единице, после чего вычислялось поле на одном горизонтальном и ряде вертикальных разрезов. При разложении вертикальных разрезов поля по собственным функциям на всей трассе длиной до 200 толщин волновода было получено, что коэффициент возбуждения первой моды оставался практически равным единице, а для второй и третьей не превышал 0,1. Это показывает, что мы эффективно возбуждаем только первую моду волновода, которая распространяется, не меняя своей формы, при этом энергия других мод не превышает одного процента общей энергии поля. Фурье-преобразование по горизонтальному разрезу также дает один максимум в спектре волновых чисел, соответствующий фазовой скорости возбужденной первой моды. Амплитуды других мод в этом случае не превосходят уровня боковых лепестков главного максимума. Таким образом, две независимые проверки показывают корректность численной реализации предложенной процедуры.

Применим указанный алгоритм к исследованию взаимодействия мод при распространении звука вниз по склону клина. Вопросу взаимодействия мод над наклонным дном посвящена обширная литература (см., например, [3]), в том числе и моделированию с помощью ПУ [4, 5], однако в целом вопрос исследован еще недостаточно.

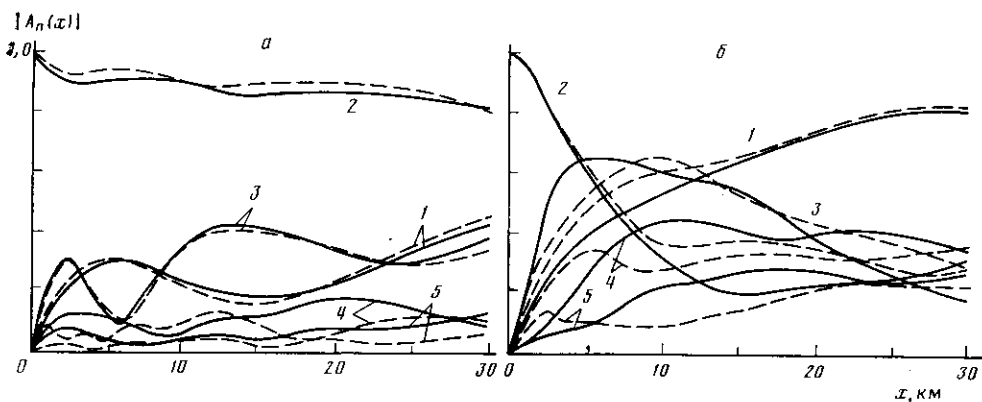


Рис. 2. Зависимости $|A_n(x)|$ от расстояния в клине при возбуждении на входе в клин второй моды: *a* — $f=25$, *b* — $f=65$ Гц. Сплошной линией показаны кривые, рассчитанные по ПУ, штриховой — аналитическим методом. Цифрами обозначены номера мод

Модель среды представляет из себя изоскоростной $c_1=1450$ м/с клин, лежащий на жидком полупространстве с $c_2=1650$ м/с, угол наклона $\alpha=2^\circ$, слева и справа клин ограничен волноводами постоянной глубины 350 и 1400 м соответственно. Между водой и дном — переходный слой толщиной 30 м с линейно изменяющимся $c^{-2}(z)$. Плотность для клина и подстилающего пространства составляет 1000 кг/м³. Сечение, в котором возбуждается выбранный набор мод, находится в левом волноводе на расстоянии L от начала клина ($x=0$), L меняется в пределах от 0 до 40 км.

На рис. 1 и 2 сплошной линией изображены модули коэффициентов возбуждения $|A_n(x)|$ мод, распространяющихся вниз по склону при возбуждении на входе в клин ($L=0$) одной первой или одной второй моды единичной амплитуды на частотах 25 и 65 Гц соответственно. Видно, что на частоте 25 Гц (рис. 1, *a*, 2, *a*) и первая и вторая моды распространяются практически без взаимодействия. Для частоты 65 Гц (рис. 1, *b*, 2, *b*) картина резко отличается, взаимодействие мод весьма сильно, и на выходе из клина, т. е. для $x=30$ км, в первоначально возбужденной моде содержится меньше энергии, чем в соседних.

Объяснить полученные результаты позволяет, например, метод аналитического моделирования взаимодействия мод [6]. В этом методе поле на входе участка с наклонным дном раскладывается по модам точного решения с фазовыми поверхностями в виде дуг окружностей с центром в вершине клина, образованного продолжением наклонного дна до пересечения с поверхностью. Эти моды распространяются над наклонным дном без взаимодействия, и на «выходе» участка с наклонным дном образованное ими поле раскладывается по обычным плоским модам волновода постоянной глубины. При этом оказывается, что в случае

$$k\alpha h(x) < 2, \quad (1)$$

где k — волновое число, $h(x)$ — глубина, α — угол наклона дна в радианах, каждая входящая мода эффективно возбуждает лишь одну моду точного решения, и поэтому взаимодействия мод при распределении практически нет, т. е. во входящей моде остается более половины первоначальной энергии.

Исходя из этого, в численных экспериментах (рис. 1, 2) параметры клина были выбраны таким образом, чтобы для частоты 25 Гц (рис. 1, *a*, 2, *a*) условие (1) выполнялось до $x=15$ км, а для 65 Гц — только в точке 0 км. Хотя картину взаимодействия мод осложняют интерференционные биения между отдельными модами, в простейшем случае, когда на входе возбуждается первая мода (рис. 1, *a*), видно, что, примерно с 15 км начинается «невосполнимая» потеря энергии входящей модой и соответственно плавный постоянный рост амплитуды второй моды. Когда возбуж-

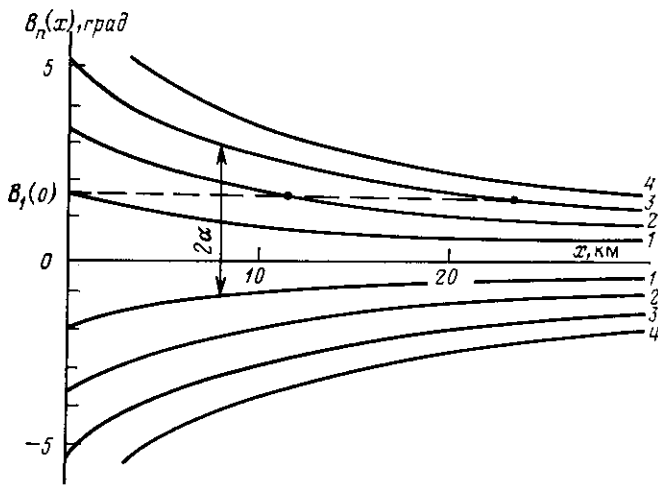


Рис. 3

Рис. 3. Зависимости $V_n(x)$ от расстояния в клине. Цифрами обозначены номера мод

Рис. 4. Зависимости $|A_n(x)|$ на выходе клина от длины плоского участка L . Цифрами обозначены номера мод

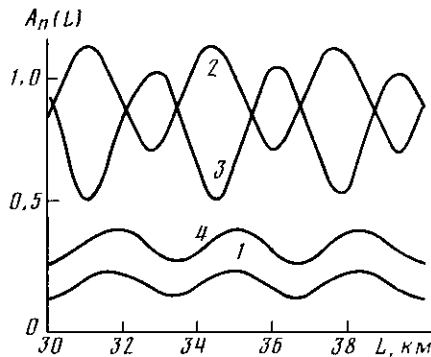


Рис. 4

дается вторая мода (рис. 2, а), обмен энергией идет одновременно с первой и с третьей модами. Поэтому интерференционные эффекты выражены сильнее и необратимая диссипация энергии входящей моды начинается примерно с 20 км.

Условия типа (1) были неоднократно получены в разных работах различными способами [6–8] и отличаются только величиной константы в правой части. Приведенные результаты расчетов $|A_n(x)|$ с помощью ПУ показывают, что граница между «почти адиабатическим» и «явно неадиабатическим» распространением в указанном выше смысле, хотя это и весьма условное разграничение, действительно лежит в районе $kh(x)\alpha \sim 2$.

Простота выбранной модели позволяет получить для нее зависимости $A_n(x)$ методом аналитического моделирования, предложенным в [6]. Для этого рассматриваемая выше модель клина с проницаемым дном заменяется на клин с абсолютно мягкими границами и глубиной $h'(x) = h(x) + \Delta h$, где $\Delta h = c_1 c_2 / (4f(c_2^2 - c_1^2)^{0.5})$, что позволяет удовлетворить граничным условиям на $h(x)$ с точностью до $O(\alpha^2)$ [9]. Результаты моделирования показаны на рис. 1, 2 пунктирными линиями. Видно, что кривые, полученные с помощью разных методов, хорошо совпадают, особенно для энергонесущих мод. Совпадение полученных разными методами результатов говорит в пользу как метода аналитического моделирования [6], так и использованной программы уточненного широкоугольного ПУ [4].

Возможна качественная интерпретация распространения звука вниз по склону клина, основанная на том, что в однородном волноводе моду можно представить в виде суперпозиции двух плоских волн или систем параллельных лучей.

Действительно, представим, что на входе в клин ($x=0$) сформирована n -я мода, которой соответствуют две системы параллельных лучей, распространяющихся под углами Бриллюэна $\pm B_n(0)$ к горизонтали. Если $|B_n(0)| < \alpha$, то такие лучи не взаимодействуют с дном и не меняют угла скольжения. При увеличении x , с ростом глубины $h(x)$, соответствующий n -й моде в сечении x бриллюэновский угол $B_n \approx \pi n / (kh(x))$ уменьшается и наступает такой момент, когда система лучей, распространяющаяся под углом $B_n(0)$, в большей степени будет соответствовать уже $(n+1)$ -й моде, т. е. $B_n(0) \approx B_{n+1}(x)$. Таким образом, одна и та же система лучей с постоянным углом скольжения будет интерпретироваться в разных сечениях клина в зависимости от глубины как моды разных номеров. Условно это можно считать механизмом передачи энергии от мод низших номеров к высшим. На рис. 1, б видно, что для 65 Гц, в случае возбуждения на входе клина первой моды, для абсцисс $x=11$ и 21 км, там, где пересекается линия $y=B_1(0)$ с кривыми $y=B_2(x)$ и $y=B_3(x)$ (рис. 3), коэффициенты возбуждения второй и третьей мод близки к достижению максимумов, т. е. энергия первой моды переходит в энергию второй и третьей мод соответственно.

Если угол $B_n(0) > \alpha$, то при соударении с дном угол скольжения системы лучей уменьшается на величину 2α . Лучам с таким углом скольжения ($B_n(0) - 2\alpha$) будет соответствовать мода более низкого номера, т. е. энергия передается от мод высших номеров к низшим. На рис. 2, б (пунктирные линии) на расстоянии $x \geq 8$ км коэффициенты возбуждения всех мод, кроме первой и третьей, меняются слабо, поэтому можно считать, что обмен энергией идет практически между первой и третьей модами, причем третья отдает, а первая получает. При этом в окрестности $x=8$ км соблюдается условие $B_3(x) - 2\alpha \approx -B_1(x)$ (см. рис. 3).

Еще один важный эффект, не выделявшийся ранее при исследовании данной задачи, заключается в том, что при возбуждении на входе в клин группы мод результат взаимодействия мод на выходе из клина сильно зависит от фаз мод на входе его.

Действительно, в силу линейности уравнений акустики нетрудно показать, что если распределение давления $p_1(z)$ на входе в клин дает коэффициент возбуждения n -й моды на выходе из клина A_n , а распределение $p_2(z) = {}_2A_n$, то распределение $p(z) = p_1(z) + p_2(z)e^{i\varphi}$ дает коэффициент возбуждения $A_n = {}_1A_n + {}_2A_n e^{i\varphi}$, при этом в зависимости от разности фаз величина $|A_n|$ будет меняться от $|{}_1A_n + {}_2A_n|$ до $|{}_1A_n - {}_2A_n|$.

На практике это означает, что в случае, когда при выполнении (1) на входе в клин возбуждена одна n -я мода, на выходе соседние моды будут давать энергетически малый вклад в поле ($|A_{n\pm 1}|^2 \ll |A_n|^2$). Если же возбудить две соседние моды сравнимой амплитуды, k -ю и $k+1$ -ю с разностью фаз φ , то на выходе того же клина добавки от k -й моды в $k+1$ и наоборот, складываясь с фазой φ , приведут к значительному перераспределению энергии между k -й и $k+1$ -й модами в зависимости от φ .

Для иллюстрации этого утверждения проведем следующий численный эксперимент: возбудим в левом волноводе на расстоянии L от начала клина ($x=0$) вторую и третью моды с амплитудами 1,0 и 0,9 соответственно на частоте 25 Гц. Меняя L от 30 до 40 км, получаем изменение $\varphi \sim$ на 6π ($\varphi(L) = (\xi_2 - \xi_3)L \approx 5\pi L c_1 / (4h^2(0)f)$), где f — частота, ξ_n — горизонтальные волновые числа мод, $h(0) = 350$ м. На рис. 4 показана зависимость коэффициентов возбуждения первых четырех мод от L в сечении $x=15$ км (условие (1) выполняется вплоть до этого сечения). Зависимость коэффициентов возбуждения от L носит периодический характер, причем изменению $\varphi(L)$ на 6π соответствуют три периода на рис. 4, при этом, несмотря на выполнение (1), энергия третьей моды меняется в 4 раза.

Из вышесказанного следует, что условие (1) обеспечивает энергетическую малость взаимодействия мод над наклонным дном только для единичной моды, а при наличии группы мод необходимо более строгое условие, которое ограничит область применимости адиабатического приближения в данной задаче самыми низкими частотами. Конкретный вид

этого условия будет зависеть от требований к точности поля, вычисленного в адиабатическом приближении.

Подводя итоги моделированию, можно сказать, что предложенный метод исследования взаимодействия мод с помощью ПУ выдерживает сравнения с точным решением, а это открывает широкие перспективы его использования в различных задачах. Применение его к волноводу с наклонным дном позволило выявить основные закономерности взаимодействия мод в этом случае, и в первую очередь существенную зависимость результата взаимодействия мод от фаз, с которыми они попадают на неоднородный участок волновода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авилов К. В.* Уточненное широкоугольное параболическое приближение. Волны и дифракция-85. Т. 2. // IX Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1985.
2. *Вагин А. В., Мальцев Н. Е.* Расчеты низкочастотных звуковых полей в слоистом океане // Вопр. судостроения. Сер. Акустика. 1977. № 9. С. 61—80.
3. *Комиссарова Н. Н.* Распространение звука в нерегулярных волноводах. Л.: ЦНИИ РУМБ, 1982.
4. *Енсен Ф. Б., Купермен У. А.* Детерминированные модели распространения звука. Ч. II. Численные результаты // Подводная акустика и обработка сигналов. М.: Мир, 1985. С. 125—134.
5. *Jensen F. B., Tindle C. T.* Numerical modelling results for mode propagation in a wedge // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 81(2), P. 214—216.
6. *Буренков С. В.* Аналитическое моделирование взаимодействия мод, распространяющихся над наклонным дном // Акуст. журн. 1989. Т. 34. № 1. С. 19—24.
7. *Попов А. В.* К расчету поля в широком нерегулярном волноводе // Распространение декаметровых радиоволн. М.: Наука, 1976.
8. *Брежневский Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Гидрометеоиздат, 1982. С. 159.
9. *Buckingham M. J.* Theory of three-dimensional acoustic propagation in a wedgelike ocean with a penetrable bottom. // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82(1). P. 198—210.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24.VIII.1988