

АКУСТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени академика Н.Н.Андреева

УДК 534.231

ос. рег. № Я 26617

св. № _____

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель директора
Акустического института по
научной работе, доктор
физ.-мат. наук, профессор

А. Д. Лямшев Д. М. ЛЯМШЕВ

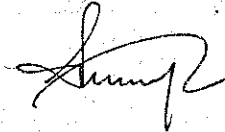
" 8 " 1984 г.

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТЧЕТ
О СОСТАВНОЙ ЧАСТИ И И Р

Вычисление гармонических звуковых полей в дву-
мерно-неоднородных волноводных в уточненном ши-
рокоугольном парасолическом приближении

Заведующий отделом № 16

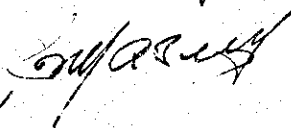
" 14 " декабрь 1983 г.



Г.И. Приймак

Научный руководитель темы
доктор технических наук

" 16 " декабрь 1983 г.



В.И. Мазонов

Научный руководитель темы
кандидат физ.-мат. наук

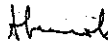
" 16 " сентябрь 1983 г.



В.В. Бородин

Исполнитель

Младший научный сотрудник
отдела № 16



К.В. Авиллов

1983 г.

РЕФЕРАТ

Настоящий отчет содержит 10 стр машинописного текста и 5 ^{об} листа графического материала.

Ключевые слова: распространение звука, параболическое приближение, адиабатическое приближение.

Отчет содержит изложение метода вычисления экспоненциальной функции от квадратного корня из матрицы. Описываемый метод применяется для решения задачи о распространении гармонического звука в океане, профиль скорости звука и профиль дна, в котором медленно изменяются с расстоянием. Описываемый метод не ограничен малым раствором диаграммы направленности источника звука и учитывает взаимодействие между модами.

Приведены примеры результатов численных расчетов.

I. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрим задачу вычисления поля точечного гармонического источника в двумерном волноводе толщины H с комплексным волновым числом k , зависящем от обеих координат, и плоскопараллельными границами:

$$(I) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(x, z) u = 2\pi \delta(x) \delta(z - z_0)$$

$$u(0) = 0 \quad u(H, 0) = 0$$

$$\lim_{x^2 + z^2 \rightarrow \infty} u(x, z) = 0 \quad \text{при } \text{Im} k > 0$$

и тесно связанную с ней задачу о поле того же источника в трехмерной цилиндрически симметричной среде с осью симметрии, проходящей через источник.

Вычисление полей будем проводить в параболическом приближении, т.е. вычислять только волны, расходящиеся от источника по координате x или r и пренебрегать их отражениями в обратном направлении. Это приближение будет справедливо только при достаточно плавной зависимости волнового числа $k(x, z)$, от координаты x .

Распространение этих волн описывается операторной задачей

Коши [1], [2]:

$$(2a) \quad \vec{u}(x) = (\hat{A}(x))^{-\frac{1}{2}} \vec{v}(x)$$

$$(2b) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = i \sqrt{\hat{A}(x)} \vec{v}$$

$$(2в) \quad \vec{v}(0) = \delta(z - z_0)$$

$$\text{где } \vec{u}(x) = u(x, z) \quad u(x, H) = 0$$

$$\hat{A}(x) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(x, z)$$

Уравнение (26) может быть решено с помощью следующей численной схемы

$$\vec{v}(x+h) = \exp\left(ih \sqrt{\hat{T}(x)}\right) \vec{v}(x)$$

для применения которой необходим алгоритм действия оператором $\exp(ih\sqrt{\hat{T}})$ на заданный вектор \vec{v} при известном операторе \hat{T} .

Этот алгоритм будет описан в пункте 2.

Для трехмерной цилиндрически симметричной задачи уравнения, аналогичные (2) имеют вид:

$$(3a) \quad \vec{v}(r) = r^{-1/2} (\hat{T}(r))^{-1/4} \vec{v}(r)$$

$$(3b) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} = i \sqrt{\hat{T}(r)} \vec{v}$$

$$(3в) \quad \vec{v}(0) = \sqrt{2\pi} \delta(z-z_0)$$

и их решение может быть приведено тем же способом.

Заметим, что уравнения (26) и (3б) есть операторная запись адиабатического метода поперечных сечений, дополненного учетом взаимодействия нормальных волн. Действительно, в базисе нормальных волн адиабатическое приближение есть

$u(x) = \hat{B}(x) \exp(ih \sqrt{\hat{\lambda}(x)}) \exp(ih \sqrt{\hat{\lambda}(x-h)}) \dots \exp(ih \sqrt{\hat{\lambda}(0)}) \hat{B}^{-1}(0) \delta(z-z_0)$
решение же согласно (2) или (3) имеет вид:

$$u(x) = \hat{B}(x) \exp(ih \sqrt{\hat{\lambda}(x)}) \hat{B}^{-1}(x) \hat{B}(x-h) \exp(ih \sqrt{\hat{\lambda}(x-h)}) \hat{B}^{-1}(x-h) \dots \hat{B}^{-1}(0) \delta(z-z_0)$$

здесь $\hat{\lambda}(x)$ - диагональная матрица из собственных значений оператора $\hat{T}(x)$, $\hat{B}(x)$ - матрица перехода из базиса нормальных волн в используемое представление вектора \vec{v} . Произведение типа $\hat{B}^{-1}(x) \hat{B}(x-h)$ есть переразложение старых нормальных волн в сечении $x-h$ по нормальным волнам в сечении x - описание взаимодействия нормальных волн.

2. Рациональные аппроксимации функции
и их обобщение на матричный
аргумент.

Для функций комплексной переменной $x = \exp(x)$ и \sqrt{x} известны [3] рациональные аппроксимации - главные диагональные приближения Паде:

$$(4) \exp(x) = \frac{M_n(x^2) + x N_n(x^2)}{M_n(x^2) - x N_n(x^2)} + E_n(x)$$

$$(5) \sqrt{x} = \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} + F_m(x)$$

где M_n, N_n, P_m, Q_m - многочлены, вычисленные по некоторым рекуррентным соотношениям, E_n и F_m - остаточные члены аппроксимации. Известно, что

$$\begin{aligned} E_n(x) &\rightarrow 0 \\ n &\rightarrow \infty \\ x &\in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_m(x) &\rightarrow 0 \\ m &\rightarrow \infty \\ x &\in \mathbb{C} \setminus [0, -\infty) \end{aligned}$$

\mathbb{C} - комплексная плоскость x . Комбинируя (4) и (5) получим:

$$(6) \exp(ih\sqrt{x}) \approx \frac{Q_m(x) M_n(-h^2x) + ih P_m(x) N_n(-h^2x)}{Q_m(x) M_n(-h^2x) - ih P_m(x) N_n(-h^2x)}$$

Числитель и знаменатель в (6) для действительных K комплексно сопряжены, и, следовательно, по абсолютной величине рациональная дробь не превосходит единицы.

Вычислив корни знаменателя в (6), мы можем записать

$$(7) \exp(ih\sqrt{x}) \approx \prod_{k=1}^K \frac{x - \bar{\mu}_k(h)}{x - \mu_k(h)}$$

так как корни числителя комплексно сопряжены корням знаменателя.

Величина остаточного члена в (6) оценивалась путем сравнения результатов расчетов по (7) с результатом работы стандартных программ в круге $|x| < 16\pi$. Оказалось, что при $K = 8$

($m=4, n=4$) разница в результатах ^{на} ^к ^с отрезке действительной оси $[.6, 1.1]$ не превосходит единицы шестого значащего разряда, несколько возрастающая при отдалении от этого отрезка. Для X , лежащих во II квадрате разница была велика, но всегда значение (7) по абсолютной величине строго меньше единицы. Все μ_k оказались лежащими в IV квадрате плоскости.

Распространим (7) на матричный аргумент. По определению функции от оператора \hat{T} [4]:

$$\exp(ih\sqrt{\hat{T}}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(ih\sqrt{\lambda}) (\hat{T} - \lambda)^{-1} d\lambda$$

Контур Γ охватывает спектр \hat{T} и оставляет его слева.

Заменяя функцию $\exp(ih\sqrt{\lambda})$ её приближением, имеющим малую ошибку в окрестности спектра \hat{T} и используя контур Γ , лежащий достаточно близко к спектру \hat{T} , имеем:

~~Вывод формулы (8)~~

$$\begin{aligned} \exp(ih\sqrt{\hat{T}}) &\approx \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \prod_{k=1}^K \frac{\lambda - \bar{\mu}_k(h)}{\lambda - \mu_k(h)} (\hat{T} - \lambda)^{-1} d\lambda = \\ (8) \quad &= \prod_{k=1}^K \frac{\hat{T} - \bar{\mu}_k(h)}{\hat{T} - \mu_k(h)} \end{aligned}$$

В вычислительных реализациях мы используем конечномерные аппроксимации оператора \hat{T} - матрицы. В силу условия $\text{Im } k(x, z) > 0$ спектр этих матриц расположен в верхней полуплоскости. Следовательно, действие операторами (8) устойчиво.

Если \hat{T} - матрица, то действие формулой (8) на заданный вектор сводится к последовательным умножениям вектора на матрицу $\hat{T} - \bar{\mu}_k(h)$ и решением системы уравнений $(\hat{T} - \mu_k(h)) \vec{a} = \vec{e}$. Целесообразно поэтому аппроксимировать \hat{T} в координатном базисе (элементы вектора \vec{u} - отсчеты функции $u(z)$ на сетке по z) ленточными матрицами. Теория таких аппроксимаций достаточно разработана [5], [6]. В численных расчетах п.3 нами использовалась

аппроксимация из [6], формула (4.3.27), обеспечивающая точность аппроксимации $O(h^4)$.

3. Примеры численных результатов.

Для атлантического профиля скорости звука (фиг.1) были выполнены расчеты горизонтальных разрезов интенсивности звукового поля частоты 40 гц. Глубина излучателя 0.15 км, глубины приемников $0.15, 0.2$ и 0.6 км. Результаты расчетов представлены на фиг. 2,3,4 соответственно. Сплошная линия - предлагаемый алгоритм, крестики - расчет методом нормальных волн, алгоритм [7]. Совпадение результатов можно считать хорошим.

Для иллюстрации работоспособности алгоритма в двумерно-неоднородной среде рассчитана картина интенсивности звукового поля в волноводе с северо-тихоокеанским переменным профилем звука и сложным рельефом дна. - фиг. 5.

Самое черное поле - интенсивность более - 1 дб, белое поле картины - интенсивность менее - 36 дб по отношению к полю источника в безграничной однородной среде на расстоянии от него 1 км. Частота излучения - 30 гц.

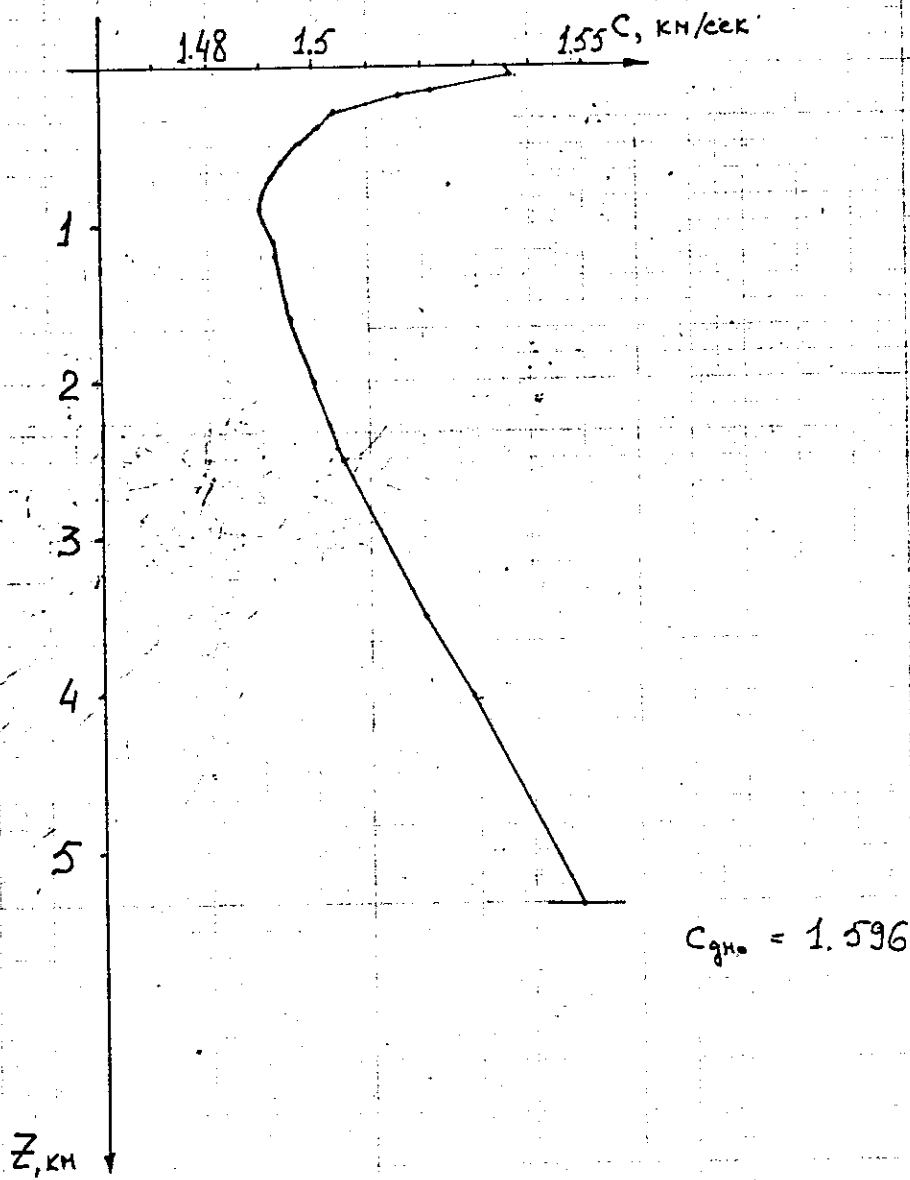
4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результатом настоящей работы являются разработка нового алгоритма вычисления гармонических звуковых полей в двумерно-неоднородных волноводах, не ограниченного предположением узости диаграммы направленности источника и учитывающего взаимодействие между нормальными волнами, бегущими в одну сторону, и реализация этого алгоритма, позволяющая рассчитывать поле в океанических волноводах на частотах от 0 до 1000 гц.

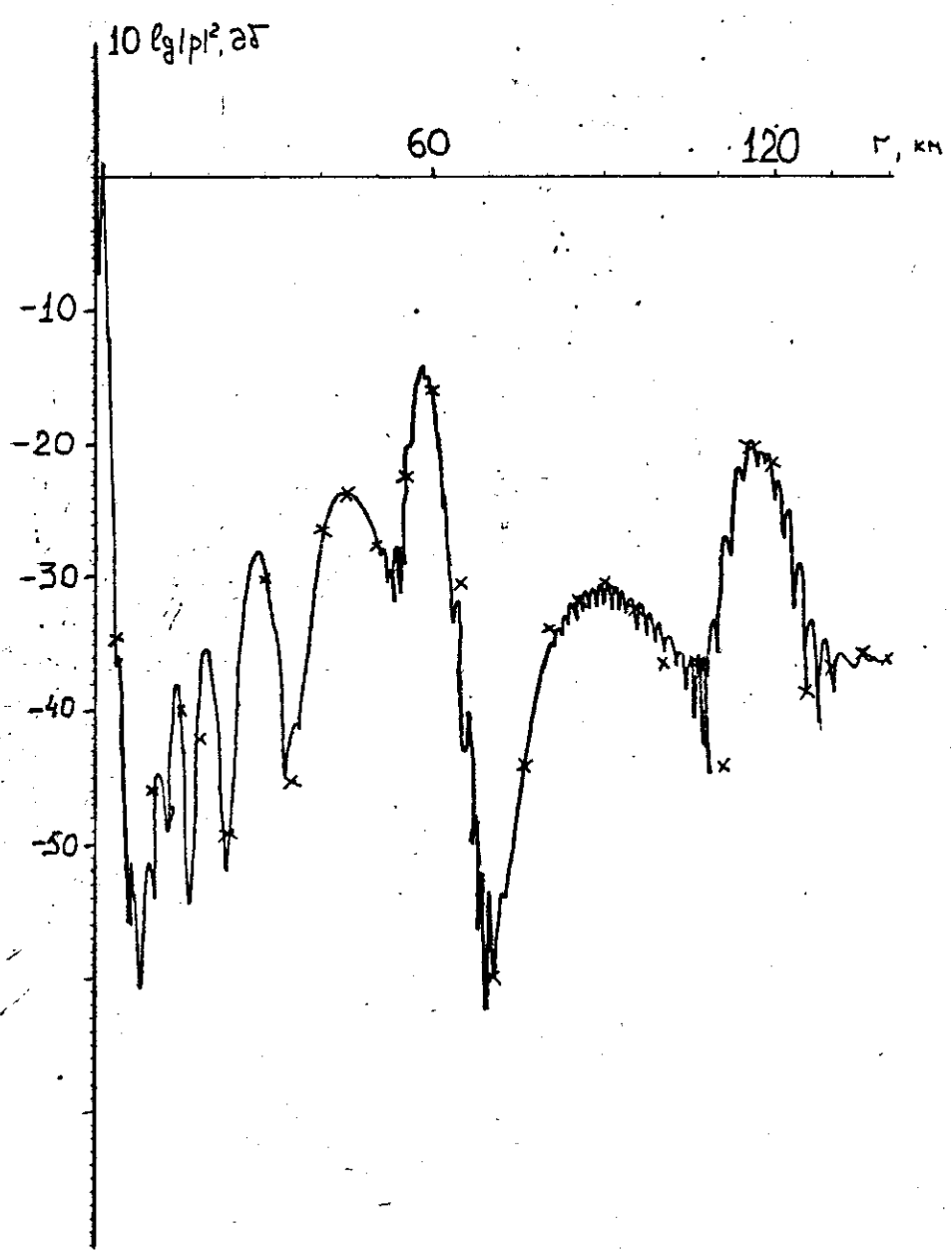
В качестве направлений дальнейшей работы следует отметить применение предложенной схемы к расчету звуковых полей в волноводах, переменных по 3-м координатам, а также введение в вычислительную схему учета отраженных волн.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

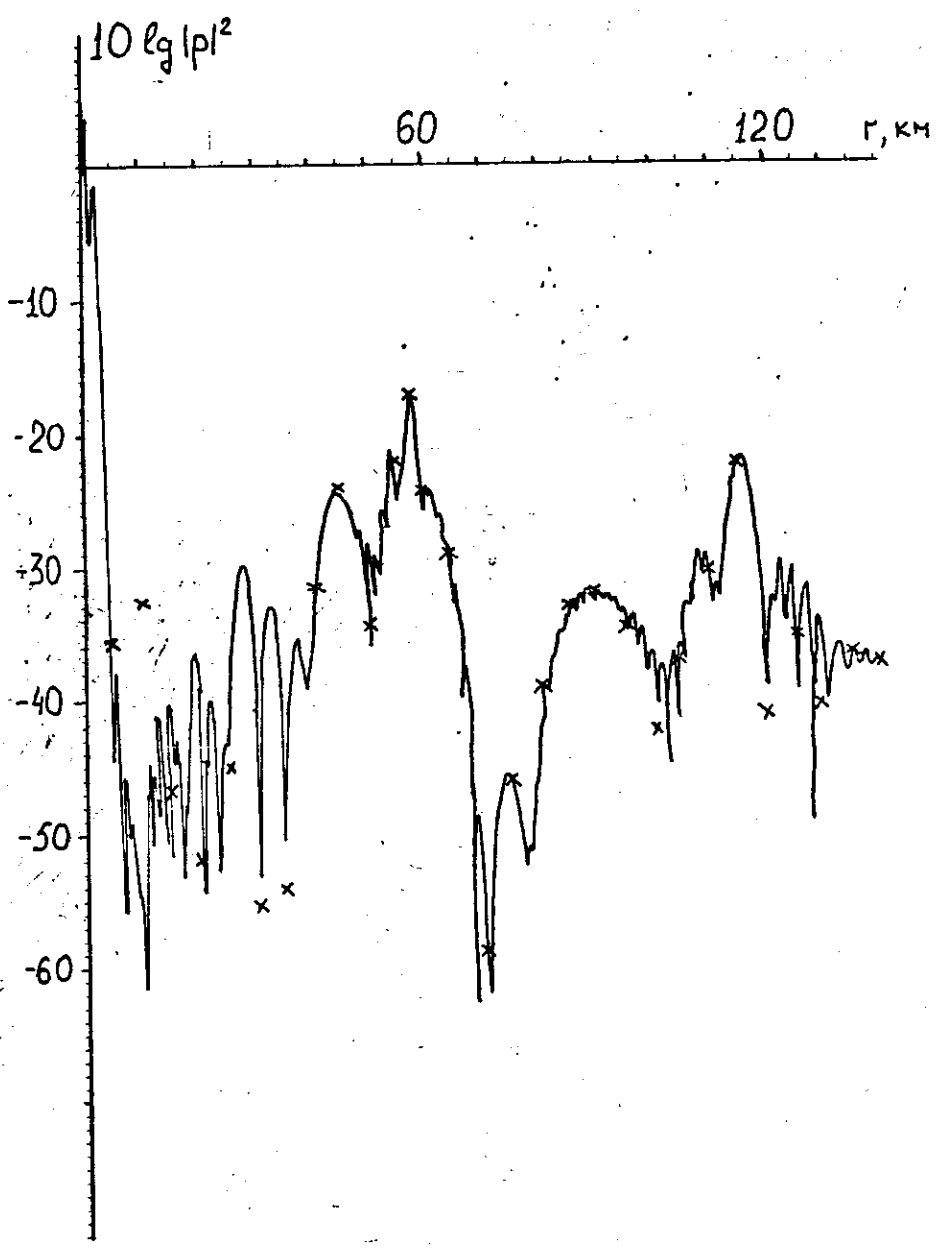
1. Р.Д. Танперт. Метод параболического уравнения. В книге Распространение волн и подводная акустика, под редакцией Дж.Б.Келлера и Дж.С.Пападевиса, Москва, "Мир", 1980г.
2. Авилов К.В., Мальцев Н.Е., К вычислению звуковых полей в океане методом параболического уравнения, Акустический журнал, 1981г., XXVII, 3 стр. 335-340.
3. Ю.Люк, Специальные математические функции и их аппроксимации, Москва, "Мир", 1980г.
4. Функциональный анализ, под ред. С.Г.Крейна, Москва, "Наука", 1972.
5. Г.И.Марчук, В.И.Агашков, Введение в проекционно-сеточные методы, Москва, "Наука", 1981.
6. И.Бабушка, Э.Витасек, М.Прагер., Численные методы решения дифференциальных уравнений, Москва, "Мир", 1969.
7. Вагин А.В., Мальцев Н.Е. Расчеты низкочастотных звуковых полей в слоистом океане. Вопросы судостроения, Акустика, вып. 9. ЦНИИ "Румб", 1977.



Фиг. 1.
 Профиль скорости звука к фиг. 2, 3, 4

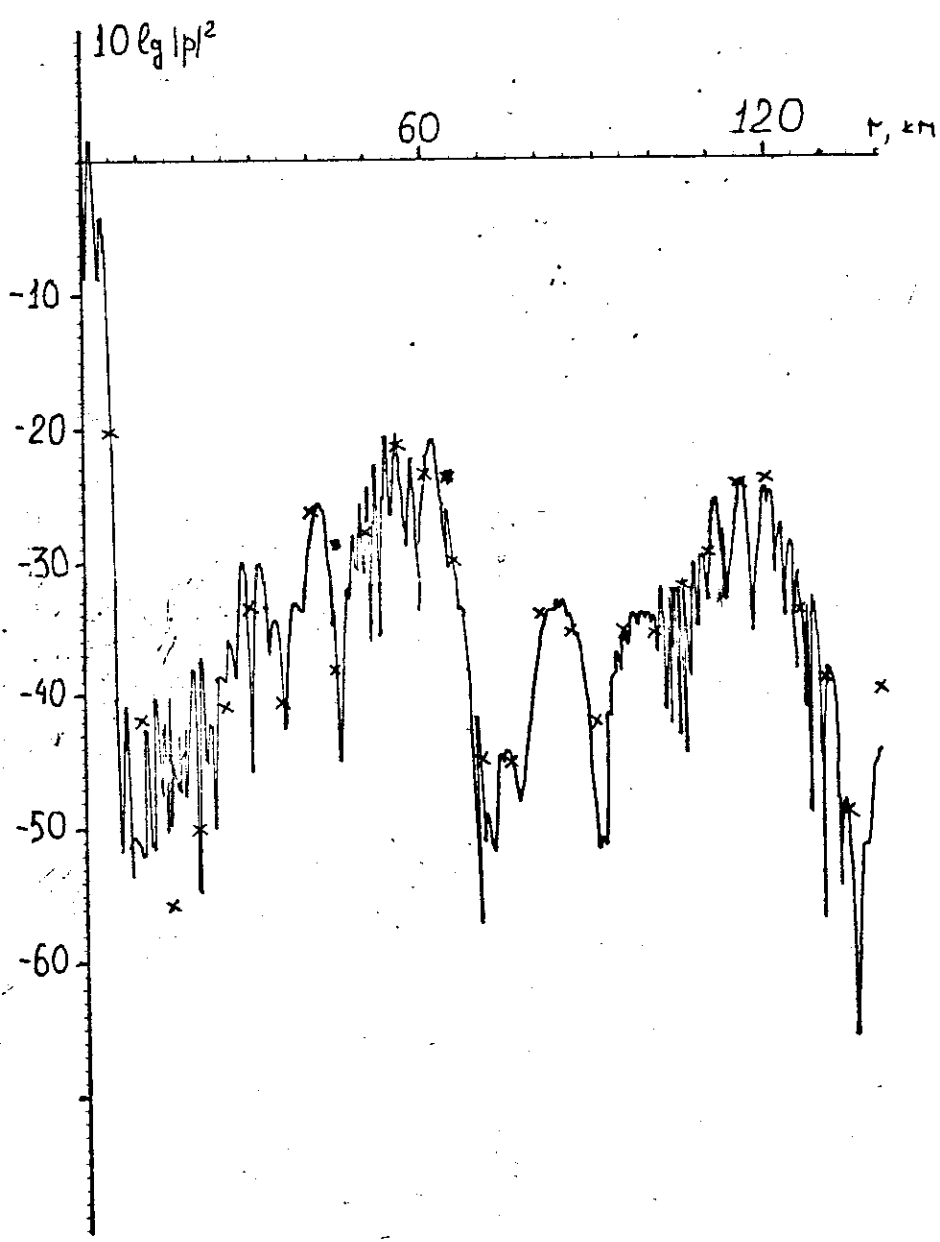


Фиг. 2
Горизонтальный разрез интенсивности звукового поля
источник - 0.15 км, приемник - 0.15 км, частота 40 гц



Фиг. 3

Горизонтальный разрез интенсивности звукового поля
источника - 0.15 км, приемника - 0.3 км, частота - 40 цу



Фиг. 4
Горизонтальный разрез интенсивности звукового поля
источника - 0.15 км, приемника - 0.6 км, частота - 40 цз.