АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Комиссия по проблемам Мирового океана

Научный совет по комплексной проблеме
"Распространение радиоволн"

МИНИСТЕРСТВА ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ГРУЗИНСКОЙ ССР И РСФСР

Грузинский политехнический институт

Московский физико-технический институт

МИНИСТЕРСТВО РАДИОПРОМЫШЛЕННОСТИ СССР

ГОССТАНДАРТ СССР

Всесоюзный научно-исследовательский институт
оптико-физических измерений

ВОЛНЫ И ДИФРАКЦИЯ – 85

IX Всесоюзный симпозиум по дифракции
и распространению волн

(г. Телави, 1985 г.)

ТОМ 2

Тбилиси – 1985

УДК 534.231

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ В ВОЛНОВОДАХ В УТОЧНЁННОМ ШИРОКОУГОЛЬНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

К.В.Авилов

Рассмотрим задачу вычисления поля точечного гармонического источника в двумерном жидком волноводе толщины H с комплексным волновым числом K и плотностью R, зависящими от обеих координат, и параллельными границами [I]:

$$R(x,z)\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R(x,z)}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R(x,z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)+K^2(x,z)p=\delta(0)\delta(z-z_s)$$

$$p(x,0)=p(x,H)=0,\quad \mathrm{Im}\,K>0 \Rightarrow \lim_{x^2+z^2\to\infty} p(x)=0 \tag{I}$$

Запишем краевую задачу (I) в операторных обозначениях:

$$\hat{R}(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\hat{R}(x)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{p}\\ \frac{\partial\vec{p}}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \hat{R}(x)\\ -\hat{T}(x) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{p}\\ \frac{\partial\vec{p}}{\partial x}\end{pmatrix} \tag{2}$$

Здесь $\vec{p}(x)=p(x,z)$, $\hat{R}(x)$, $\hat{T}(x)$ – операторы:

$$\hat{R}(x)\vec{p}(x)=R(x,z)\,p(x,z)$$

$$\hat{T}(x)\vec{p}(x)=R(x,z)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R(x,z)}\frac{\partial p(x,z)}{\partial z}+K^2(x,z)p(x,z)$$

с областью определения из функций $\vec{p}(x)$, удовлетворяющих краевым условиям на границе волновода.

Попытаемся найти решения однородного уравнения, соответствующего (2), в виде суммы волн, бегущих вправо и влево, т.е. проведём замену переменной

$$\begin{pmatrix}\vec{p}\\ \frac{\partial\vec{p}}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i\sqrt{\hat{T}(x)} & -i\sqrt{\hat{T}(x)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{p}_+\\ \vec{p}_-\end{pmatrix}$$

Проведя в (2) необходимые преобразования, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\vec{p}_+\\ \vec{p}_-\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} i\sqrt{\hat{T}(x)}\, - \right. \tag{3}$$

$$\left. -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\hat{T}(x)}}\left(\frac{\partial\sqrt{\hat{T}(x)}}{\partial x}-\frac{\partial\hat{R}(x)}{\partial x}\frac{1}{\hat{R}(x)}\sqrt{\hat{T}(x)}\right)\right]\begin{pmatrix}\vec{p}_+\\ \vec{p}_-\end{pmatrix}$$

Из (3) видно, что в слоистом волноводе разделение на сумму волн, бегущих вправо и влево – точное, а в общем случае недиагональные члены, описывающие взаимодействие волн, бегущих в разные стороны, имеют меньший порядок по норме оператора $\hat{T}$, чем главные. Предполагая плавную зависимость $\hat{R}$ и $\hat{T}$ от x, ограничимся в (3) главными членами и получим независимые уравнения для волн, бегущих в разные стороны, например, для волны, бегущей вправо:

$$\frac{\partial\vec{p}_+}{\partial x}=i\sqrt{\hat{T}(x)}\,\vec{p}_+ \tag{4}$$

Это–операторный аналог главного приближения метода ВКБ [2]. С другой стороны это–операторная запись метода адиабатических поперечных сечений, дополненная учётом взаимодействия нормальных волн, бегущих в одну сторону. Начальные условия для волны, уходящей от источника, получаются из сравнения с решением в слоистом волноводе:

$$\vec{p}_+(0)=\left(2\sqrt{\hat{T}(0)}\right)^{-1}\vec{\delta}$$

Уравнение (4) может быть численно решено по схеме простого предсказания:

$$\vec{p}_+(x+h)=\exp\left[ih\sqrt{\hat{T}(x)}\right]\vec{p}_+(x) \tag{5}$$

Метод параболического уравнения Леонтовича–Фока эквивалентен вычислению оператора шага в (5) $\exp\left[ih\sqrt{\hat{T}(x)}\right]$ с помощью тейлоровского разложения (R =I) [3] :

$$\exp\left[ih\sqrt{\hat{T}(x)}\right]\approx\exp\left[ih\left(K_0+\frac{1}{2K_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{K^2(x,z)-K_0^2}{2K_0}\right)\right] \tag{6}$$

и, следовательно, предполагает малость поперечных волновых чисел поля, а также слабую зависимость волнового числа от глубины.

Алгоритм Хардина-Tапперта, предполагая дополнительно малость коммутатора $\left[\partial^2/\partial z^2,\ K^2(x,z)\right]$, позволяет реализовать решение (6) по следующей схеме [4] :

$$\exp\left[ih\left(K_0+\frac{1}{2K_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{K^2(x,z)-K_0^2}{2K_0}\right)\right]=$$

$$=\exp\left[ihK_0\right]\exp\left[ih\frac{K^2(x,z)-K_0^2}{4K_0}\right]\exp\left[\frac{ih}{2K_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\exp\left[ih\frac{K^2(x,z)-K_0^2}{4K_0}\right]+O(h^3)$$

Мы предлагаем вычислять оператор шага с использованием дробно-рациональных аппроксимаций функции $\exp[ih\sqrt{\lambda}]$ комплексной переменной λ. В частности, из аппроксимации Падэ функций $\exp[ih\varkappa]$ и $\varkappa=\sqrt{\lambda}$ [5], может быть сконструирована аппроксимация, имеющая любую наперёд заданную точность в ограниченной окрестности нуля комплексной плоскости λ, вида

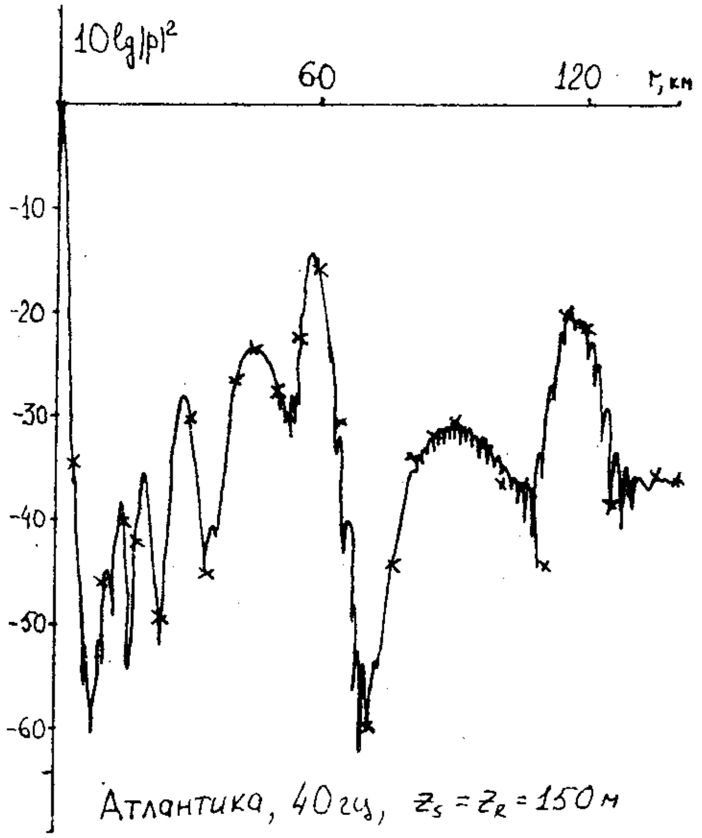
$$\exp\left[ih\sqrt{\lambda}\right]=\prod_{\ell=1}^{N}\frac{\lambda-\mu_\ell''(h)}{\lambda-\mu_\ell(h)}+E_N,\quad \lim_{N\to\infty}E_N=0 \qquad (7)$$

("–знак комплексного сопряжения), причём все μ_ℓ оказываются лежащими в нижней полуплоскости. В вычислениях на ЦВМ всегда используются конечномерные аппроксимации операторов – матрицы, а значит, их спектры всегда лежат в ограниченной части плоскости λ. Используя определение функции от оператора [6], распространим (7) на матричный аргумент

$$\exp\left[ih\sqrt{\hat{T}}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\exp\left[ih\sqrt{\lambda}\right]\left(\hat{T}-\lambda\right)^{-1}d\lambda\approx$$

$$\approx\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\prod_{\ell=1}^{N}\frac{\lambda-\mu_\ell''(h)}{\lambda-\mu_\ell(h)}\left(\hat{T}-\lambda\right)^{-1}d\lambda=\prod_{\ell=1}^{N}\frac{\hat{T}-\mu_\ell''(h)}{\hat{T}-\mu_\ell(h)} \qquad (8)$$

Контур Γ охватывает спектр $\hat{T}$ и оставляет его слева. В силу того, что $\mathrm{Im}K\geq 0$, действие операторами (8) устойчиво. Численная реализация шага (8) сводится к умножениям вектора на матрицу и решения систем линейных уравнений. При расчётах нами использовалась аппроксимация $\hat{T}$ методом интегральных тождеств [7]. Результаты расчёта полей предлагаемым методом в слоистых волноводах практически полностью совпадают с результатами расчётов методом нормальных волн (см. рисунок).



ЛИТЕРАТУРА

1. Л.М.Бреховских, Волны в слоистых средах, М.: Наука, 1973.
2. Дж.Хединг, Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), М.: Мир, 1965.
3. Тапперт Ф.Д., Метод параболического уравнения. В книге "Распространение волн и подводная акустика", под ред. Дж.Б.Келлера и Дж. С.Пападакиса, М.: Мир, 1980.
4. Tappert F.D., Hardin R.H., Computer simulation of long-range ocean acoustic propagation using the parabolic equation method. -In: 8th Intern. Congr. on Acoustics, Contributed papers, London, 1974, v.2, p.452.
5. Ю.Люк, Специальные математические функции и их аппроксимаци М.: Мир, 1980
6. Функциональный анализ, под ред. С.Г.Крейна, М.: Наука, 1972
7. Г.И.Марчук, В.И.Агошков, Введение в проекционно-сеточные методы, М.: Наука, 1981.