

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
КОМИССИЯ ПО ПРОБЛЕМАМ МИРОВОГО ОКЕАНА

B581  
A44

# АКУСТИКА ОКЕАНСКОЙ СРЕДЫ

Ответственные редакторы:

академик *Л.М. Бреховских*,

доктор физико-математических наук *И.Б. Андреева*



МОСКВА "НАУКА" 1989

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1957. 501 с.
2. *Зенкевич О.С.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 315 с.
3. *Мальцев Н.Е.* Об одной модификации метода ВКБ // ДАН СССР. 1983. Т. 271. С. 811–815.
4. *Мальцев Н.Е.* Математическое моделирование звуковых полей в океане // Акустика океана: Современное состояние. Под ред. Л.М. Бреховских, И.Б. Андреевой. М.: Наука, 1982. С. 5–24.
5. *Ames W.E.* Nonlinear partial differential equations in engineering. N.Y.: Acad. press, 1972. Vol. 2. 243 p.
6. *Bayliss A., Goldstein C.I., Turkel E.* An iterative method for the Helmholtz equation // J. Comput. Phys. 1983. Vol. 49. P. 443–451.
7. *Bayliss A., Goldstein C.I., Turkel E.* An accuracy condition for the numerical computation of waves // Ibid. 1984. Vol. 50. P. 117–129.
8. *Bayliss A., Goldstein C.I., Turkel E.* Preconditionate conjugate gradient methods // Elliptic problem Solvers II // Ed. G. Birkhoff. N.Y.: Acad. press, 1984. Vol. 2. P. 233–243.
9. Computational ocean acoustics. The invited lectures from the workshop held at Yale university, Aug. 1–3, 1984 // Comput. and Math. Appl. 1985. Vol. 7/8. 891 p.
10. *Hadamard J.* Lectures on Cauchy's problem. Yale: Univ. press, 1932. 151 p.
11. *Shrödinger E.* Collected papers on wave mechanics. Chelsea, 1932. 261 p.
12. *Sommerfeld A., Runge J.* Anwendung der Vectorrechnung zur geometrische Optic // Ann. Phys. 1911. Bd. 35. S. 277–284.
13. *Strang G., Fix G.* An analysis of the finite element method. N.Y.: Prentice Hall, 1973. 215 p.
14. *Yong D.M.* Iterative solution of large linear systems. N.Y.: Acad. press, 1971. 215 p.

УДК 534.231

*К.В. Авилов*

### ПРИБЛИЖЕНИЕ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ В ВЫЧИСЛЕНИИ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ В ОКЕАНЕ

Рассмотрим модельную задачу вычисления звукового поля точечного гармонического источника в двумерном слоистом волноводе ширины  $H$  с прямыми параллельными свободными границами и комплексным волновым числом [3]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2(z)p = \delta(x)\delta(z - z_0),$$

$$p = p(x, z), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad z \in [0, H],$$

$$p(x, +0) = 0, \quad p(x, H - 0) = 0,$$

$$\min_{z \in [0, H]} \operatorname{Im} k^2(z) > 0 \rightarrow \lim_{x^2 + z^2 \rightarrow \infty} p(x, z) = 0.$$
(1)

Введем поперечный дифференциальный оператор  $\hat{T}$  с областью определения из достаточно гладких функций  $u = u(z)$  равенством [18]:

$$\hat{T}u = \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} + k^2(z)u(z),$$

$$u \in \{u: u(+0) = 0, u(H - 0) = 0\},$$

что позволит переписать задачу (1) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \hat{T}u = \delta(x)\delta_{z_0}, \quad \delta_{z_0} = \delta(z - z_0),$$

$$u = u(x), \quad x \in (-\infty, \infty),$$

$$\min \operatorname{Im} \sigma(\hat{T}) > 0 \Rightarrow \lim_{|x| \rightarrow \infty} |u| = 0,$$
(2)

здесь  $\sigma(\hat{T})$  — спектр оператора  $\hat{T}$ .

Напомним определение функции от линейного оператора [14]:

$$f(\hat{T}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\hat{T} - \lambda)^{-1} d\lambda. \quad (3)$$

Здесь  $\Gamma$  — контур в комплексной плоскости  $\lambda$ , охватывающий спектр оператора и оставляющий его слева, а сам оператор предполагается таким, что интеграл сходится. В случае, когда  $\hat{T}$  — оператор простой структуры, например матрица, из (3) легко следует известное определение функции от матрицы [6]:

$$\begin{aligned} f(\hat{T}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) \hat{\Phi} \text{diag}(\lambda_i - \lambda)^{-1} \hat{\Phi}^{-1} d\lambda = \\ &= \hat{\Phi} \text{diag} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda_i - \lambda)^{-1} d\lambda \hat{\Phi}^{-1} = \hat{\Phi} \text{diag} f(\lambda_i) \hat{\Phi}^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\text{diag} a_i$  — матрица с главной диагональю из элементов  $a_i$  и нулевыми остальными элементами,  $\hat{\Phi}$  — оператор перехода из базиса собственных векторов в заданный.

Если в уравнении (2) рассматривать  $\hat{T}$  как квадрат операторного волнового числа, то оно совпадает по записи с одномерным уравнением Гельмгольца. При этом имеет место замечательное обстоятельство: любое решение уравнения (2) может быть записано в виде, также совпадающем по написанию с общим решением одномерного уравнения Гельмгольца [14]:

$$u(x) = \exp(ix\sqrt{\hat{T}})v_+ + \exp(-ix\sqrt{\hat{T}})v_-. \quad (5)$$

Здесь  $v_+$  и  $v_-$  — не зависящие от  $x$  элементы области определения оператора  $\hat{T}$ , а знак  $\sqrt{\quad}$  означает ветвь квадратного корня, такую, что  $\sqrt{1} = 1$ . В справедливости (5) легко убедиться прямой подстановкой в (2) с использованием определения (3).

Ввиду того что спектр оператора  $\hat{T}$  при  $\min_{z \in [0, H]} \text{Im} k^2(z) > 0$  лежит в верхней полуплоскости левее прямой

$$\text{Re} \lambda = \max_{z \in [0, H]} \text{Re} k^2(z),$$

имеем

$$\exp(\mp ix\sqrt{\hat{T}})v_{\mp} \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow \pm\infty,$$

и в силу условия на бесконечности слева и справа от источника решение задачи (2) будет иметь вид расходящихся от источника волн:

$$u(x) = \exp(i|x|\sqrt{\hat{T}})v_+,$$

а условие в источнике приводит к ответу [14]:

$$u(x) = \exp(i|x|\sqrt{\hat{T}})(2i\sqrt{\hat{T}})^{-1} \delta_{z_0}. \quad (6)$$

Отметим, что волны, расходящиеся от источника вправо и влево, являются решениями начальных задач для обобщенного параболического уравнения

$$\partial u / \partial x = \pm ix\sqrt{\hat{T}}u,$$

$$u(0) = (2i\sqrt{\hat{T}})^{-1} \delta_{z_0}$$

соответственно, т.е. эти обобщенные параболические уравнения точно описывают распространение волн в слоистом открытом волноводе.

Опишем теперь известные способы вычисления представления (6). Так как  $(\hat{T} - \lambda)^{-1} \delta_{z_0}$  есть функция Грина поперечной краевой задачи

$$\frac{d^2 g(z, z_0)}{dz^2} + k^2(z)g(z, z_0) = \lambda g(z, z_0) + \delta(z - z_0),$$

$$g(+0, z_0) = 0, \quad g(H - 0, z_0) = 0,$$

то (3) есть также и хорошо известное [3] интегральное представление поля в слоистом волноводе. Далее, если  $\hat{T}$  имеет дискретный спектр с собственными значениями  $\lambda_l$  и собственными функциями  $\varphi_l(z)$ , то, учитывая равенство  $\delta_{z_0} = \sum_l \varphi_l(z) \varphi_l(z_0)$ , имеем (4), (6)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x) &= \hat{\Phi} \text{diag} [\exp(ix\sqrt{\lambda_l})(2i\sqrt{\lambda_l})^{-1}] \hat{\Phi}^{-1} \delta_{z_0} = \\ &= \sum_l \varphi_l(z) \hat{\varphi}_l(z_0) \exp(ix\sqrt{\lambda_l})(2i\sqrt{\lambda_l})^{-1}, \end{aligned}$$

т.е. представление в виде суммы нормальных волн.

В работах [12, 13] известная формула для преобразования Фурье функции  $\exp(ix\sqrt{\lambda})(2i\sqrt{\lambda})^{-1}$  [7]

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{\frac{ix^2}{4\mu}} e^{i\lambda\mu} d\mu = \sqrt{\frac{i}{\pi\lambda}} e^{ix\sqrt{\lambda}}$$

позволяет преобразовать представление (6) с одной, например правой, стороны от источника следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{ix\sqrt{\lambda}}}{2i\sqrt{\lambda}} (\hat{T} - \lambda)^{-1} d\lambda \delta_{z_0} &= -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{i}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{\frac{ix^2}{4\mu}} e^{i\lambda\mu} (\hat{T} - \lambda)^{-1} d\lambda d\mu \delta_{z_0} = \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{\pi i}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{\frac{ix^2}{4\mu}} e^{i\hat{T}\mu} d\mu \delta_{z_0} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi i_0}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{\frac{ix^2}{4\mu}} \mathbf{u}(\mu) d\mu, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{u}(\mu) = e^{i\hat{T}\mu} \delta_{z_0}$  есть решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial \mu &= i \hat{T} \mathbf{u} = i \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(z) \right) \mathbf{u}(\mu, z), \\ \mathbf{u}(0) &= \delta_{z_0}, \end{aligned}$$

дифференциальное уравнение которой совпадает с точностью до константы с параболическим уравнением Леонтовича—Фока [8].

Рассмотрим теперь двумерный волновод, состоящий из двух полубесконечных слоистых волноводов одинаковой ширины, но с разными волновыми числами  $k_L$  и  $k_R$ , сопряженных по поперечному сечению, перпендикулярному их границам:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_R}{\partial x^2} + \hat{T}_R \mathbf{u}_R = 0,$$

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{u}_R(x) \quad x \in (0, \infty), \quad \hat{T}_R = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_R^2(z),$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial x^2} + \hat{T}_L \mathbf{u}_L = 0,$$

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u}_L(x), \quad x \in (-\infty, 0), \quad \hat{T}_L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_L^2(z),$$

$$\mathbf{u}_L(-0) = \mathbf{u}_R(+0),$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}_L}{\partial x} \right|_{x=-0} = \left. \frac{\partial \mathbf{u}_R}{\partial x} \right|_{x=+0}$$

Пусть из левого волновода на границу раздела падает операторная волна — набор нормальных волн  $\exp(ix\sqrt{\hat{T}_L}) \mathbf{v}_+$ .

Тогда обычным путем легко получить следующие формулы для прошедшей  $\mathbf{u}_+$  и отраженной  $\mathbf{u}_-$  операторных волн:

$$\mathbf{u}_+(x) = \exp(ix\sqrt{\hat{T}_R})(\sqrt{\hat{T}_L} + \sqrt{\hat{T}_R})^{-1} 2\sqrt{\hat{T}_L} \mathbf{v}_+,$$

$$\mathbf{u}_-(x) = \exp(-ix\sqrt{\hat{T}_L})(\sqrt{\hat{T}_L} + \sqrt{\hat{T}_R})^{-1} (\sqrt{\hat{T}_L} - \sqrt{\hat{T}_R}) \mathbf{v}_+. \quad (7)$$

Вид формулы (7) позволяет надеяться, что при близких  $k_L$  и  $k_R$  операторный коэффициент прохождения  $(\sqrt{\hat{T}_L} + \sqrt{\hat{T}_R})^{-1} 2\sqrt{\hat{T}_L}$  будет близок к единичному, а операторный коэффициент отражения  $(\sqrt{\hat{T}_L} + \sqrt{\hat{T}_R})^{-1} (\sqrt{\hat{T}_L} - \sqrt{\hat{T}_R})$  близок к нулевому.

Представим теперь себе двумерно-неоднородный волновод постоянной ширины, имеющий кусочно-слоистую структуру, т.е. состоящий из участков волноводов, примыкающих друг к другу по поперечным сечениям, перпендикулярным к границе волновода. Если волновые числа в соседних участках слабо отличаются друг от друга, то, принимая во внимание приведенное выше соображение, можно надеяться, что формула

$$u(x) = \left[ \prod_m \exp(\pm i(x_m - x_{m-1})\sqrt{\hat{T}_m}) \right] (2i\sqrt{\hat{T}_0})^{-1} \delta_{z_0}. \quad (8)$$

будет давать результат, достаточно близкий к истинному, а саму ее назвать приближением однонаправленного распространения. Формулу можно подправить учетом операторного коэффициента прохождения:

$$u(x) = \left[ \prod_m \exp(i(x_m - x_{m-1})\sqrt{\hat{T}_m}) (\sqrt{\hat{T}_{m-1}} + \sqrt{\hat{T}_m})^{-1} 2\sqrt{\hat{T}_{m-1}} \right] (2i\sqrt{\hat{T}_0})^{-1} \delta_{z_0}, \quad (9)$$

и назвать ее приближением однонаправленного распространения с учетом коэффициента прохождения.

Вычисления по формуле (8) могут быть проведены всеми методами, пригодными для вычисления полей в слоистых волноводах, однако их применение требует значительных вычислительных ресурсов. Возможны некоторые упрощения, экономящие объем вычислений. Перепишем (8), введя базис нормальных волн в каждом  $m$ -ом участке волновода:

$$u(x) = \hat{\Phi}_N \exp(ih_N \sqrt{\Lambda_N}) \hat{\Phi}_N^{-1} \hat{\Phi}_{N-1} \exp(ih_{N-1} \sqrt{\Lambda_{N-1}}) \hat{\Phi}_{N-1}^{-1} \dots \hat{\Phi}_1 \exp(ih_1 \sqrt{\Lambda_1}) \hat{\Phi}_1^{-1} f_0, \quad (10)$$

$$h_m = x_m - x_{m-1}, \quad \Lambda = \text{diag } \lambda_l.$$

В (10) произведение  $\hat{\Phi}_m^{-1} \hat{\Phi}_{m-1}$  есть переразложение "старых" нормальных волн на участке  $m-1$  по "новым" нормальным волнам на участке  $m$  — описание взаимодействия нормальных волн. Адиабатический метод поперечных сечений [3] полагает приближенно  $\hat{\Phi}_m^{-1} \hat{\Phi}_{m-1} \approx I$ , пренебрегая взаимодействием нормальных волн, что приводит к появлению дополнительных по сравнению с приближением однонаправленного распространения ошибок.

Метод параболического уравнения Леонтовича—Фока [8] сводится к применению тейлоровского разложения [18]:

$$\sqrt{\hat{T}} \approx k_0 + \frac{\hat{T} - k_0^2}{2k_0} = k_0 + \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{k^2(z) - k_0^2}{2k_0},$$

приводящего, согласно (3), к классическому дифференциальному уравнению в частных производных параболического типа (например, справа от источника):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{i}{2k_0} (k^2(z) - k_0^2) v,$$

$$u(x, z) = v(x, z) e^{ik_0 x}, \quad (11)$$

с достаточной точностью описывающему распространение узких волновых пакетов, волновые числа которых близки к  $k_0$ , внося заметную неконтролируемую ошибку для широких волновых пакетов. Среди методов решения уравнения (11) следует особо отметить явную схему Хардина—Ташперта [19], обладающую абсолютной устойчивостью

$$v(x+h) = \exp \left[ \frac{ih}{4k_0} (k^2(z) - k_0^2) \right] \exp \left[ \frac{ih}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \exp \left[ \frac{ih}{4k_0} (k^2(z) - k_0^2) \right] v(x) + O(h^3). \quad (12)$$

Возможно применение неявных разностных схем к решению уравнения (11) [17, 20].

Известны некоторые модификации формул (11), (12), например [21], обладающие меньшими ошибками, но имеющие те же недостатки.

В работах [15, 16] предложен метод, получивший название метода неявных конечных разностей (Implicit Final Difference), основывающийся на применении простейшего дробно-рационального приближения для квадратного корня:

$$\sqrt{\lambda} \approx (a_0 + a_1 \lambda) / (b_0 + b_1 \lambda),$$

где  $a_0, a_1, b_0, b_1$  — некоторые константы, выбираемые из соображений аппроксимаций на областях плоскости  $\lambda$ , содержащих спектр оператора  $\hat{T}$ .

Соответствующее дифференциальное уравнение в частных производных

$$\left( b_0 + b_1 \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(z) \right) \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \left( a_0 + a_1 \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(z) \right) \right) u$$

целесообразно осуществлять по неявной схеме типа Кранка—Николсон, откуда и произошло название метода.

В работе [1] предложен метод вычисления оператора шага в (8), основанный на применении дробно-рациональной аппроксимации высокого порядка функции  $\exp(i\sqrt{\lambda})$  комплексной переменной  $\lambda$ . Такая аппроксимация может быть сконструирована из главных диагональных приближений Паде функций  $\exp(\lambda)$  и  $\sqrt{\lambda}$  [10]:

$$\exp(\lambda) = \frac{M_n(\lambda^2) + \lambda N_n(\lambda^2)}{M_n(\lambda^2) - \lambda N_n(\lambda^2)} + E_n(\lambda), \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow E_n(\lambda) \rightarrow 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (13)$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{P_m(\lambda)}{Q_m(\lambda)} + F_m(\lambda), \quad m \rightarrow \infty \Rightarrow F_m(\lambda) \xrightarrow{\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, -\infty)} 0, \quad (14)$$

где  $M_n, N_n, P_m, Q_m$  — многочлены, вычисляемые по некоторым рекуррентным соотношениям,  $E_n$  и  $F_m$  — остаточные члены аппроксимаций. Комбинируя (13) и (14), получим

$$\exp(ih\sqrt{\lambda}) = \frac{Q_m(\lambda)M_n(-h^2\lambda) + ihP_m(\lambda)N_n(-h^2\lambda)}{Q_m(\lambda)M_n(-h^2\lambda) - ihP_m(\lambda)N_n(-h^2\lambda)} + H(\lambda). \quad (15)$$

Числитель и знаменатель в (15) для действительных  $\lambda$  комплексно сопряжены, и, следовательно, по абсолютной величине эта рациональная дробь не превосходит единицы. Вычислив корни знаменателя в (15), мы можем записать

$$\exp(ih\sqrt{\lambda}) = \prod_l \frac{L \lambda - \mu_l^*}{\lambda - \mu_l} + H_L,$$

так как корни числителя комплексно сопряжены корням знаменателя. Ошибка аппроксимации  $H_L$  стремится к нулю в любой ограниченной окрестности нуля комплексной плоскости, кроме разреза  $(-\infty, 0)$  с ростом порядка аппроксимации. Принимая во внимание, что при вычислениях на цифровых вычислительных машинах всегда используются конечномерные аппроксимации оператора  $\hat{T}$ , спектр которых лежит в конечной окрестности нуля комплексной плоскости, и учитывая (2), приходим к формуле

$$\exp(ih\sqrt{\hat{T}}) \approx \prod_l (\hat{T} - \mu_l^*) (\hat{T} - \mu_l)^{-1}, \quad (16)$$

позволяющей вычислять оператор шага в (8) с любой заданной степенью точности. В практических расчетах для океанических волноводов оказалось, что порядок аппроксимации  $L = 8$  обеспечивает точность, не худшую, чем точность стандартных программ для вычисления тригонометрических функций и квадратного корня на ЦВМ с 32-битной арифметикой с плавающей запятой для длины шага в восемь длин волн

для волновых чисел с показателями преломления в диапазоне (0,6, 1,1), и что корни оказываются лежащими в нижней полуплоскости, что приводит к абсолютной устойчивости действия оператором шага (16).

Аппроксимация оператора  $\hat{T}$  проводилась методом интегральных тождеств, приводившим к трехдиагональным матрицам, и, следовательно, вычисления согласно (16) сводились к умножениям на трехдиагональные матрицы и решению систем линейных алгебраических уравнений с такими же матрицами и оказались вполне приемлемыми в смысле вычислительных затрат. При вычислении полей в слоистых волноводах результаты по (16) практически полностью совпадают с результатами расчетов методом нормальных волн.

Рассмотрим теперь трехмерный слоистый волновод:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + k^2(z)u = -2 \frac{\delta(r)}{r} \delta(z - z_0),$$

$$u = u(r, z), \quad r \in [0, \infty], \quad z \in [0, H],$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, H) = 0,$$

$$\min_z \operatorname{Im} k^2(z) > 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} u(r, z) = 0.$$

Рассуждая так же, как и при выводе (6), приходим к формуле для поля точечного источника [2]:

$$u(r, z) = i\pi H_0^{(1)}(r\sqrt{\hat{T}})\delta_{z_0} \quad (17)$$

(функция Ханкеля второго рода неограниченно растет при  $r \rightarrow \infty$ ).

Выражение (17) имеет асимптотику по  $r$ :

$$u(r, z) \sim \sqrt{\frac{2}{i\pi r \sqrt{\hat{T}}}} \exp(ir\sqrt{\hat{T}})\delta_{z_0}. \quad (18)$$

Представим теперь себе цилиндрически-симметричный двумерно-неоднородный волновод, состоящий из концентрических колец, имеющих слоистую структуру. Толщину колец будем считать достаточно малой. Вводя новую независимую горизонтальную переменную  $x = \ln r$ , запишем уравнение Гельмгольца для звукового поля в виде

$$\partial^2 u / \partial x^2 + e^{2x} \hat{T}(x) u = 0.$$

Применяя к нему приближение однонаправленного распространения и учитывая только "скалярную часть" коэффициента прохождения (9), получим

$$u(r) = \prod_m \left[ \exp(i(x_m - x_{m-1})) e^x \sqrt{\hat{T}_m} \frac{2e^{x_m}}{e^{x_m} + e^{x_{m-1}}} \right] u_0 = \\ = \frac{1}{\sqrt{r}} \prod_m [\exp(i(r_m - r_{m-1})) \sqrt{\hat{T}(r)}] u_0, \quad (19)$$

где  $u_0$  — поле при некотором  $r_0$ .

Пусть точечный источник расположен на оси симметрии, а среда вокруг него слоистая до расстояний, на которых применима асимптотика (18). Из (19) тогда видно, что при-

ближение однонаправленного распространения с начальным условием  $u_0 = \sqrt{\frac{2}{i\pi \sqrt{\hat{T}_0}}} \delta_{z_0}$  приводит к тому же ответу, что и асимптотика (18), а значит, это условие может быть использовано в качестве начального для вычисления поля в двумерно-неоднородном цилиндрически-симметричном волноводе.

Если в волноводе изменяется с координатами не только волновое число, но и плотность, то формулы (6) и (8) сохраняют свою форму, а (9) запишется в виде

$$u(x) = \prod_m \exp(i(x_m - x_{m-1})) \sqrt{\hat{T}_m} (\hat{R}_{m-1}^{-1} \sqrt{\hat{T}_{m-1}} + \hat{R}_m^{-1} \sqrt{\hat{T}_m})^{-1} 2R_m^{-1} \sqrt{\hat{T}_m} u_0$$

при  $\hat{R}(x) = R(x, z)$  ( $R(x, z)$  — плотность среды) и

$$\hat{T}(x) = R(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R(x, z)} \frac{\partial}{\partial z} + k^2(x, z).$$

В работах по распространению волн в плавнорегулярных волноводах (см. обзор [4]) для некоторых модельных волноводов получены результаты вычислений поля в приближении однонаправленного распространения, по физическому смыслу аналогичном формуле (8), но с применением поперечных сечений в различных системах координат.

Переходим к вычислению широкополосных звуковых полей. Вначале рассмотрим задачу Коши для одномерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\delta(x)\delta(t),$$

$$u = u(x, t), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t \in [0, \infty),$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

имеющую решение [5]

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \theta\left(t - \frac{|x|}{c}\right),$$

представляющее собой волну, расходящуюся от источника. Это решение может быть записано в виде операторной функции, действующей на некоторый исходный вектор, а именно

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \exp\left(-\frac{|x|}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} \delta(t) = \\ &= \exp\left(-\frac{|x|}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{c}{2} \theta(t) = \frac{c}{2} \theta\left(t - \frac{|x|}{c}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Функции от оператора  $\partial/\partial t$  понимаются в смысле определения через преобразование Лапласа  $L$  [9]:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi(t) = L^{-1} [f(p)L[\varphi(t)](p)](t).$$

Форма решения задачи Коши в операторной записи (20) совпадает с формой решения эллиптического уравнения Гельмгольца (6), если положить в последней  $\hat{T} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ .

Для задачи Коши на плоскости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(t),$$

$$u = u(r, t), \quad r \in [0, \infty), \quad t \in [0, \infty),$$

$$u(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = 0,$$

известное решение в виде расходящейся волны

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta(t - r/c)}{\sqrt{t^2 - r^2/c^2}},$$

также может быть представлено в операторной форме в полной аналогии с одномерным уравнением и (17)

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi} K_0 \left( \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta(t)$$

(см. [7, с. 815, ф-ла (29.31.19)]).

Для смешанной задачи Коши в полосе — двумерном слоистом плоском волноводе со свободными границами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta(x) \delta(z - z_0) \delta(t),$$

$$u = u(x, z, t), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad z \in [0, H], \quad t \in [0, \infty),$$

$$u(x, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, z, 0) = 0,$$

$$u(x + 0, t) = 0, \quad u(x, H - 0, t) = 0,$$

принимая во внимание, что волны должны расходиться по координате  $x$  от источника, запишем формально решение в виде

$$u(x, t) = \exp\left(-|x| \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}}\right) \left(2 \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}}\right)^{-1} \delta_{z_0} \delta(t).$$

Используя определения действия операторами (3), (19), например для случая, когда при каждом  $p$  оператор  $\frac{p^2}{c^2(z)} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  имеет точечный спектр, получаем очевидно справедливую (в случае существования) формулу

$$u(x, t) = L^{-1} [\hat{\Phi}(p) \text{diag} (\exp(-|x| \sqrt{\lambda(p)}) (2\sqrt{\lambda(p)})^{-1}) \hat{\Phi}^{-1}(p) \delta_{z_0}] (t).$$

Приближение однонаправленного распространения получается из тех же соображений, что и для гармонических полей, и имеет ту же форму (8) с

$$\hat{T} = - \left( \frac{1}{c^2(x, z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

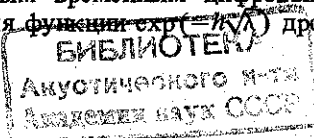
Остановимся на вопросе численной реализации действия оператором шага по  $x$ :

$\exp\left(-h \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}}\right)$ , переводящим весь временной сигнал  $u(x, t)$  в  $u(x + h, t)$ .

Соотношение  $\exp\left(-\tau \frac{\partial}{\partial t}\right) f(t) = \Delta f(t) = f(t - \tau)$  [9] и известные дробно-рациональные аппроксимации функции  $\ln x$  [10] позволяют получить дискретные аппроксимации любого порядка для  $\frac{\partial}{\partial t}$ ; в частности, простейшая из них (1,0)-аппроксимация Паде для  $\ln x$  приводит к формуле Кранка-Николсон

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{2}{\tau} \frac{\Delta - 1}{\Delta + 1}.$$

Дискретизируя координату  $z$  с помощью, например, интегральных тождеств [11], приходим к выводу, что оператор  $\frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  может быть аппроксимирован некоторым дробно-рациональным временным цифровым фильтром с матричными коэффициентами. Используя для функции  $\exp(-\sqrt{\lambda})$  дробно-рациональные аппрокси-



мации и принимая во внимание, что суперпозиция дробно-рациональных функций есть дробно-рациональная функция, заключаем, что мы можем построить цифровой временной фильтр с матричными коэффициентами с бесконечной импульсной характеристикой, сколь угодно точно воспроизводящий импульсную характеристику участка волновода.

Очевидно, что зависимость от времени скорости звука  $c(x, z, t)$  в рамках описанной схемы приводит к зависимости от времени матричных коэффициентов фильтра, что позволяет учесть ее при вычислении звуковых полей.

Для трехмерных цилиндрически-симметричных волноводов точно так же, как и для гармонических источников, получается формула для поля в слоистом волноводе:

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi} K_0 \left( r \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \right) \delta_{z_0} \delta(t),$$

и аналогично для приближения однонаправленного распространения:

$$u(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}} v(r, t),$$

$$v(r+h, t) = \exp(-h\sqrt{\hat{T}}) v(r, t),$$

$$v(0, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\hat{T}}(0)}} \delta_{z_0} \delta(t),$$

$$\hat{T}(r) = \frac{1}{c^2(r, z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - R(r, z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R(r, z)} \frac{\partial}{\partial z}.$$

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Л.М. Бреховских и Н.Е. Мальцеву, инициировавшим настоящую работу, и В.И. Гельфгату за многочисленные и конструктивные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Авилов К.В.* Вычисление гармонических звуковых полей в волноводах в уточненном широкоугольном параболическом приближении // Волны и дифракция — 85: IX Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Тбилиси, 1985. Т. 2. С. 236—239.
2. *Авилов К.В., Мальцев Н.Е.* К вычислению звуковых полей в океане методом параболического уравнения // Акуст. журн. 1981. Т. 27, вып. 3. С. 335—340.
3. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
4. *Булдырев В.С., Буслаев В.С.* Распространение звука в океане: Препр. ИРЭ АН СССР. № 45 (417). М., 1984. 43 с.
5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
8. *Леонтович М.А., Фок В.А.* Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения // ЖЭТФ. 1946. Т. 16, № 7. С. 557—562.
9. *Лере Ж.* Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 208 с.
10. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
11. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сегочные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
12. *Полянский Э.А.* О связи между решениями уравнений Гельмгольца и типа Шредингера // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1972. Т. 12, № 1. С. 241—249.
13. *Полянский Э.А.* Метод коррекции решения диффузионного приближения Г.Д. Маложинца для плоского волновода и некоторые его приложения // Акуст. журн. 1982. Т. 28, вып. 5. С. 673—680.
14. *Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна.* М.: Наука, 1972. 544 с.
15. *Claerbout J.F.* Fundamentals of geophysical data processing. N.Y.: McGraw-Hill, 1976. 497 p.
16. *Greene R.R.* The rational approximation to the acoustic wave equation with bottom interaction // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. Vol. 76, N 6. P. 1764—1773.

17. Lee D., Papadakis J.S. Numerical solution of the wave equation: An ordinary-differential equation approach // Ibid. 1980. Vol. 68, N 5. P. 1482-1488.
18. Tappert F.D. The parabolic approximation method // Lecture notes in physics. B.; Heidelberg; N.Y.: Springer, 1977. Vol. 70. P. 224-284.
19. Tappert F.D., Hardin R.H. Computer simulation of long-range ocean acoustic propagation using the parabolic equation method // VIII Intern. Congr. Acoust.: Contrib. Par. L., 1974. Vol. 2. P. 452.
20. Tappert F.D., Lee D. A range-refraction parabolic equation // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. Vol. 76, N 6. P. 1797-1803.
21. Thompson D.J., Chapman N.R. A wide-angle split-step algorithm for the parabolic equation // Ibid. 1983. Vol. 74, N 6. P. 1848-1854.

УДК 534.231.1

Н.С. Агеева, В.Д. Крутин

**ОСОБЕННОСТИ МОДОВОЙ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ  
В СЛОИСТОМ ВОЛНОВОДЕ  
ПРИ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВЕРХНЕМ СЛОЕ ДНА,  
РАВНОЙ И МЕНЬШЕЙ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОДЕ**

При формировании модовой структуры звукового поля в волноводе со слоистым поглощающим дном важную роль играет соотношение скоростей звука в дне на границе вода-дно  $c_{10}$  и в воде  $c_0$ . В реальных морских условиях  $c_{10}/c_0 \geq 1$  и  $c_b/c_0 < 1$ . При этом, согласно работам Гамильтона [4], скорость продольных волн в осадочном слое растет с глубиной. Влияние величины градиента скорости продольных волн в осадочном слое  $G = \partial c_l / \partial z$  для всех трех случаев  $c_b/c_0$  различно. Расчеты показали, что при  $c_{10}/c_0 > 1$  положительный градиент  $G$  в осадках приводит к такому же качествен-

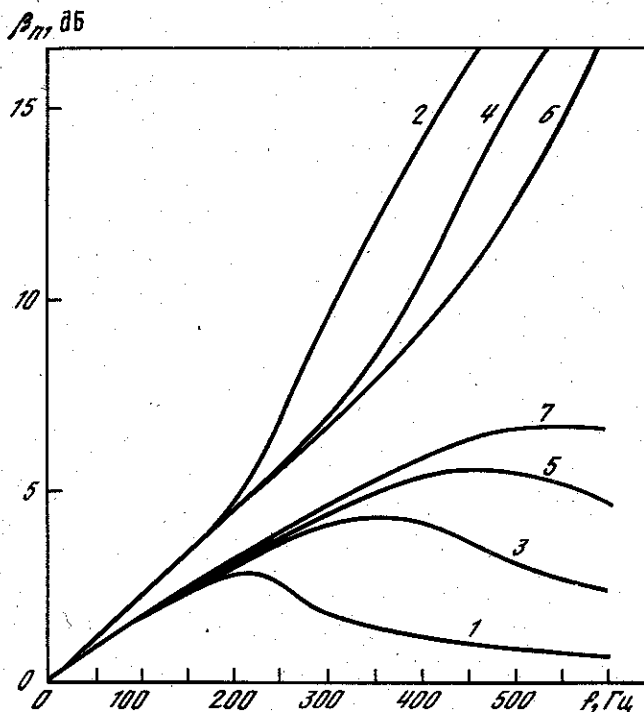


Рис. 1. Частотные зависимости коэффициентов затухания мод при  $c_{10}/c_0 = 1$ ,  $\rho_{10} \neq \rho_0$ ,  $G = 0$   
Цифры — номера мод